THE 4th ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DZIEŃ 1: PIĄTEK, 25. LUTEGO 2011, BUKARESZT

Język: polski

Zadanie 1. Wykazać, że istnieją takie funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że funkcja $f \circ g$ jest ściśle malejąca, a funkcja $g \circ f$ jest ściśle rosnąca.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieje wielomian $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, spełniający następujące warunki:

(1) dla każdej liczby całkowitej k, liczba $f(k)$ jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy k nie dzieli się przez n;

(2) stopień wielomianu $f(x)$ jest mniejszy niż n.

Zadanie 3. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Prosta ℓ jest równoległa do prostej BC, przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach D i E, oraz przecina okrąg ω w punktach K i L (punkt D leży pomiędzy K i E). Okrąg γ_1 jest styczny do odcinków KD i BD oraz do okręgu ω, podczas gdy okrąg γ_2 jest styczny do odcinków LE i CE oraz do okręgu ω. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia wspólnych stycznych wewnętrznych okręgów γ_1, γ_2 przy zmieniającym się położeniu prostej ℓ.
(Wspólną styczną wewnętrzną dwóch okręgów nazywamy taką ich wspólną styczną, że okręgi te leżą po przeciwnych jej stronach.)

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 7 punktów.
Czas pracy: $4\frac{1}{2}$ godziny.

THE 4$^{\text{th}}$ ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DZIEŃ 2: SOBOTA, 26. LUTEGO 2011, BUKARESZT

Język: polski

Zadanie 4. Dla dodatniej liczby całkowitej $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ oznaczmy przez $\Omega(n) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ sumaryczną liczbę dzielników pierwszych n licząc razem z wielokrotnościami. Zdefiniujmy ponadto $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (przykładowo $\lambda(12) = \lambda(2^2 \cdot 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$). Udowodnić, że

i) istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n, dla których $\lambda(n) = \lambda(n+1) = +1$;

ii) istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n, dla których $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

Zadanie 5. Dla danej liczby całkowitej $n \geq 3$ wyznaczyć wszystkie konfiguracje n parami różnych punktów $X_1, X_2, \ldots X_n$ na płaszczyźnie o następującej własności:

Dla każdej pary różnych punktów X_i, X_j istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ taka, że $d(X_i, X_k) = d(X_j, X_{\sigma(k)})$ dla wszystkich $1 \leq k \leq n$.

(Przez $d(X, Y)$ rozumiemy odległość punktów X i Y.)

Zadanie 6. W pola kwadratowej tablicy 2011×2011 zostały wpisane liczby $1, 2, \ldots, 2011^2$, przy czym każda z nich została użyta dokładnie raz. Następnie utożsamiono ze sobą przeciwległe boki tablicy (lewy z prawym oraz górny z dolnym) w standardowy sposób, tworząc w rezultacie powierzchnię torusa (czyli dętkę rowerową).

Wyznaczyć największą możliwą liczbę całkowitą dodatnią M, dla której niezależnie od wybranego sposobu wpisania liczb istnieją dwa sąsiadujące pola o różnicy wpisanych liczb nie mniejszej niż M.*

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 7 punktów.

Czas pracy: $4\frac{1}{2}$ godziny.

*Pola o współrzędnych (x, y) oraz (x', y') uważamy za sąsiadujące jeśli $x = x'$ oraz $y - y' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$, lub jeśli $y = y'$ oraz $x - x' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$.