LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
3 września – 5 października 2018 r. (pierwsza seria)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Taka liczba **nie** istnieje.

Załóżmy, że taka liczba całkowita k istnieje i niech ℓ będzie liczbą wystąpień każdej z cyfr $0, 1, \ldots, 9$ w zapisie dziesiętnym liczby 2^k. Wówczas suma cyfr liczby 2^k jest równa

$$\ell(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 45\ell,$$

czyli jest liczbą podzielną przez 3. Jednakże z cechy podzielności liczby przez 3 wynika, że 2^k jest również podzielna przez 3 – sprzeczność. $\square$

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

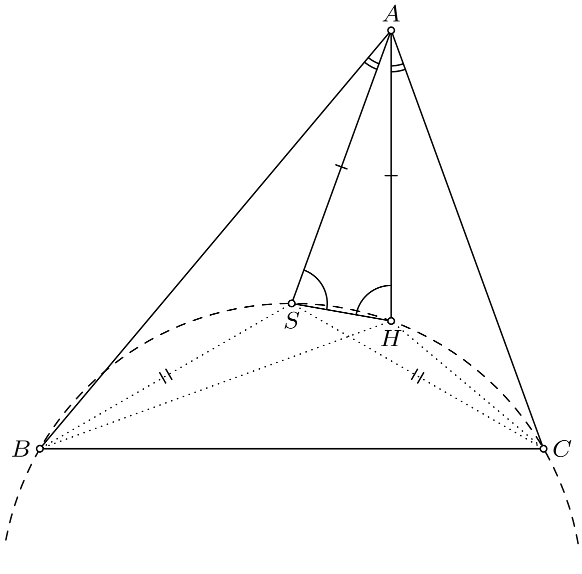
Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukana miara kąta wynosi $60°$.

Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $AB > AC$. Oznaczmy przez α, β i γ miary kątów wewnętrznych trójkąta przy wierzchołkach odpowiednio A, B i C. Ponieważ H to ortocentrum trójkąta ABC, to

$$\sphericalangle CHA = 180° - (90° - \gamma + 90° - \alpha) = \gamma + \alpha = 180° - \beta. \qquad (1)$$

Punkty B, S, H i C leżą na jednym okręgu, stąd



rys. 1

$$\sphericalangle BSC = \sphericalangle BHC = 180° - \alpha,$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystujemy analogiczną równość jak w (1). Ponadto $BS = SC$, więc $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SCB = \frac{1}{2}\alpha$. Ponownie wykorzystując fakt, iż na czworokącie $BSHC$ można opisać okrąg dostajemy, że $\sphericalangle SHC = 180° - \frac{1}{2}\alpha$. Zatem

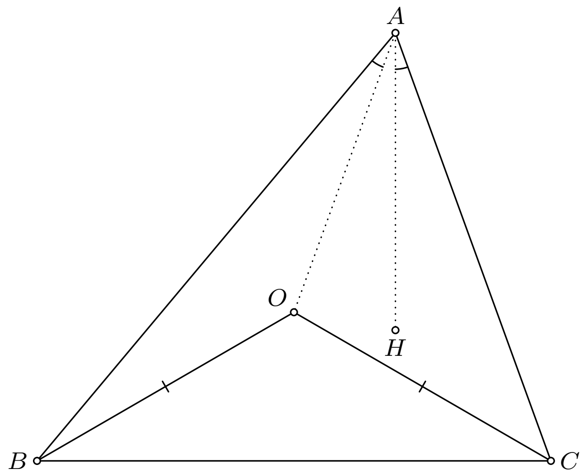
$$\sphericalangle HSA = \sphericalangle AHS = 360° - \sphericalangle CHA - \sphericalangle SHC = 360° - (180° - \beta) - \left(180° - \frac{1}{2}\alpha\right) = \beta + \frac{1}{2}\alpha.$$

W czworokącie $BSHC$, wpisanym w okrąg, zachodzi równość $\sphericalangle CSH = \sphericalangle CBH = 90° - \gamma$. Oczywiście $\sphericalangle BSC = 180° - \alpha$, więc

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 360° - (\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSH + \sphericalangle HSA) = \\ &= 360° - \left(180° - \alpha + 90° - \gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90° + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAS &= 180° - \sphericalangle ASB - \sphericalangle SBA = \\ &= 180° - \left(90° + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta\right) - \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90° - \gamma = \sphericalangle HAC. \qquad (2)\end{aligned}$$



rys. 2

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wówczas $OB = OC$ oraz

$$\sphericalangle BAO = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOB) = \frac{1}{2}(180° - 2\gamma) = 90° - \gamma = \sphericalangle HAC.$$

Skoro $SB = SC$ oraz zachodzi równość (2), to $S = O$. W szczególności $2\alpha = \sphericalangle BSC = 180° - \alpha$, więc $\alpha = 60°$. $\square$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby wymierne a, b, c, że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Takie liczby **nie** istnieją.

Jeżeli x jest wspólnym pierwiastkiem wielomianów P i Q, to jest również pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) - Q(x) = (a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = (a-b)(x-1)\left(x - \frac{c-a}{a-b}\right).$$

Oznacza to, że $x = 1$ lub $x = \frac{c-a}{a-b}$. Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, to obie te liczby są wymierne, więc liczby wymierne a, b, c o szukanej własności nie istnieją. $\square$

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2-4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że ze względu na symetrię wystarczy udowodnić, że płytka 2×2 nie może zakrywać pól z pierwszych dwóch wierszy szachownicy, których pewna krawędź jest zawarta w brzegu szachownicy.

W każde pole szachownicy wpisujemy numer jego wiersza. Reszta z dzielenia przez 5 sumy wpisanych liczb wynosi

$$S = 2018 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2018) \equiv 3 \cdot (1 + 2 + 3) \equiv 3 \pmod 5.$$

1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	1
2	2	2	2	2	2	2	$\cdots$	2
3	3	3	3	3	3	3	$\cdots$	3
4	4	4	4	4	4	4	$\cdots$	4
5	5	5	5	5	5	5	$\cdots$	5
6	6	6	6	6	6	6	$\cdots$	6
7	7	7	7	7	7	7	$\cdots$	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2018	2018	2018	2018	2018	2018	2018	$\cdots$	2018

rys. 3

Jeżeli płytka o wymiarach 2×2 leży w pierwszym i drugim wierszu szachownicy, to suma przykrytych przez nią pól wynosi $K = 2 \cdot (1 + 2) = 6$. Każda płytka 1×5 przykrywa albo pięć takich samych liczb albo pięć kolejnych liczb, zatem suma liczb przykrytych przez taką płytkę jest podzielna przez 5. Ponieważ $S \not\equiv K \pmod 5$, to nie jest możliwe aby cała szachownica była pokryta. $\square$

(db,mg)