LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: 1 września — 30 września 2016 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, że spośród liczb
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$
pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

Rozwiązanie

Zachodzi równość $(a+b)(b^2+bc+c^2)-(b+c)(a^2+ab+b^2)=$
$=b^2(a+b-b-c)+c(a+b)(b+c)-a(b+c)(a+b)=$
$=(c-a)\big((a+b)(b+c)-b^2\big)=(c-a)(ab+bc+ca).$

Wobec tego
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}=\frac{(c-a)(ab+bc+ca)}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)}\ .$$
Analogicznie
$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}-\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}=\frac{(a-b)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \quad \text{oraz}$$
$$\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}-\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{(b-c)(ab+bc+ca)}{(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}\ .$$
Jeśli więc zachodzi równość $ab+bc+ca=0$, to wszystkie trzy liczby są równe. Jeśli $ab+bc+ca\neq 0$, to z założenia, że $a\neq b\neq c\neq a$ wynika,

że $$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\neq\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}\neq\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\neq\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$$

Wobec tego jeśli dwie spośród liczb $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$, $\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$ są równe, to trzecia też. $\square$

Rozwiązanie drugie

Z równości $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ wynika, że $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}=\frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}$ — rozszerzyliśmy oba ułamki, a z tej równości wynika, że
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}=\frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}=\frac{a^2-b^2+b^2-c^2}{a^3-b^3+b^3-c^3}=\frac{a^2-c^2}{a^3-c^3}=\frac{a+c}{a^2+ac+c^2},$$
więc jeśli dwie są równe, to trzecia też. „Po drodze” skorzystaliśmy z tego, że $\frac{w}{x}=\frac{y}{z}\Longleftrightarrow\frac{w}{x}=\frac{w+y}{x+z}$, jeśli $x\neq 0,\ z\neq 0,\ x+z\neq 0$. $\square$

2. W skrzyni znajduje się 2017 kul. Na każdej kuli napisana jest dokładnie jedna liczba całkowita. Losujemy ze zwracaniem dwie kule ze skrzyni i dodajemy napisane na nich liczby. Udowodnić, że prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest większe niż $\frac{1}{2}$.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę tych kul, na których jest napisana liczba nieparzysta, a p — liczbę kul, na których jest napisana liczba parzysta. Par (uporządkowanych) kul, na których napisane zostały liczby tej samej parzystości jest n^2+p^2, a par, na których napisano liczby o różnej parzystości, jest $2np$, więc prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest równe $\frac{n^2+p^2}{2017^2}$, a nieparzystej $\frac{2np}{2017^2}$. Zauważmy, że $n\neq p$, gdyż suma tych dwu liczb całkowitych jest równa 2017, zatem jedna z nich jest nieparzysta, a druga parzysta. W takim razie $n^2+p^2-2np=(n-p)^2>0$, wobec czego $\frac{n^2+p^2}{2017^2}>\frac{2np}{2017^2}$. Tak więc z równości $\frac{n^2+p^2}{2017^2}+\frac{2np}{2017^2}=\frac{(n+p)^2}{2017^2}=\frac{2017^2}{2017^2}=1$ wynika nierówność $\frac{n^2+p^2}{2017^2}>\frac{1}{2}$. $\square$

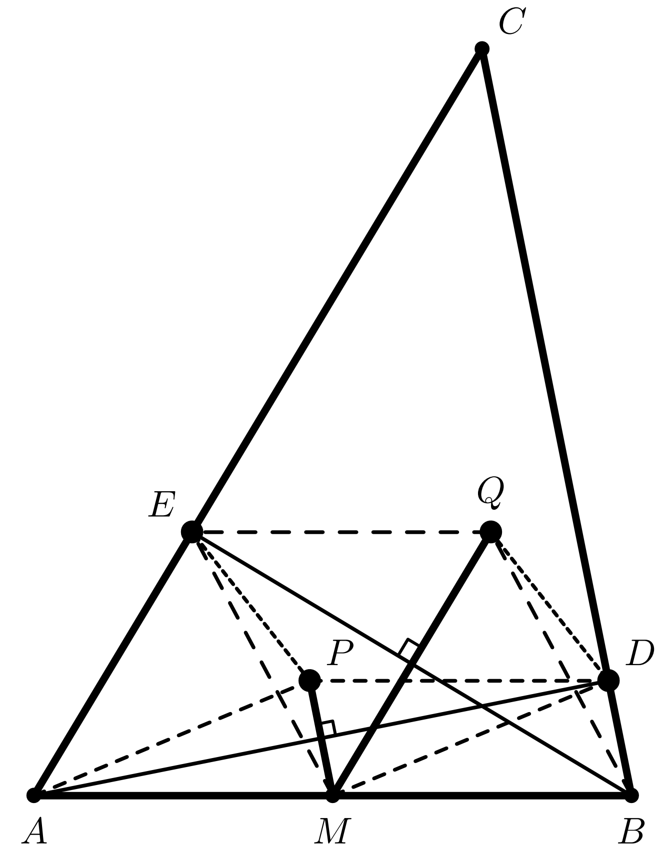
3. Odcinki AD, BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkty P, Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD, BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie

Ponieważ M jest środkiem odcinka AB i $MP \perp AD$, więc $MP \parallel BC$. Stąd i z twierdzenia Talesa wynika, że prosta MP przecina odcinek AD w jego środku.

Czworokąt $AMDP$ jest więc rombem. Podobnie czworokąt $BMEQ$ jest rombem. Wynikają stąd równości $EQ = MB = AM = PD$ i zależności $EQ \parallel MB \parallel AM \parallel PD$. Jeśli odcinki PD i EQ leżą na jednej prostej, to teza jest spełniona. Jeśli te odcinki nie leżą na jednej prostej, to czworokąt $PDQE$ jest równoległobokiem i wtedy przekątna DE przecina przekątną PQ w punkcie dzielącym każdą z nich na połowy i teza też jest spełniona.



4. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0,1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b zachodzi nierówność

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \frac{2t}{2+t}\cdot(|a|+|b|)\,.$$

Autor zadania: Michał Strzelecki

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b i $t\in(0,1)$ zachodzą nierówności:

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant |a+(1+t)b+a+(1-t)b| = \\ = 2|a+b| \geqslant 2|a|-2|b|$$

oraz

$$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| = \\ = |a+(1+t)b|+|-a-(1-t)b| \geqslant |a+(1+t)b-a-(1-t)b| = 2t|b|.$$

Otrzymujemy wobec tego

(1) $\quad |a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant 2|a|-2|b|$

oraz

(2) $\quad |a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant 2t|b|.$

Dodając do nierówności (1) pomnożonej przez $\frac{t}{2+t}$ nierówność (2) pomnożoną przez $\frac{2}{2+t}$ otrzymujemy

$|a+(1+t)b|+|a+(1-t)b| \geqslant \frac{t}{2+t}\cdot(2|a|-2|b|)+\frac{2}{2+t}\cdot 2t|b| = \frac{2t}{2+t}\,(|a|+|b|)$,

czyli tezę. $\square$

II seria: 1 października — 31 października 2016 r.

5. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n, która ma więcej niż 2017 dzielników d spełniających warunek

$$\sqrt{n} \leqslant d < 1,01\sqrt{n}.$$

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie

Niech k będzie taką liczbę naturalną, że

$$\left(\tfrac{k+1}{k}\right)^{2017} = \left(1+\tfrac{1}{k}\right)^{2017} < 1{,}01.$$

Nierówność ta może być przepisana w formie

$$\frac{1}{k} < \sqrt[2017]{1{,}01}-1 \quad \text{czyli} \quad k > \frac{1}{\sqrt[2017]{1{,}01}-1}\,,$$

więc taka liczba k istnieje.

Przyjmijmy $n=(k(k+1))^{2\cdot 2017}$. Wówczas

$$\sqrt{n} = (k(k+1))^{2017} < k^{2016}(k+1)^{2018} < k^{2015}(k+1)^{2019} < \ldots < \\ < k(k+1)^{4033} < (k+1)^{4034}.$$

Liczby w tym ciągu są postaci $k^j(k+1)^{4034-j}$, gdzie $j\leqslant 2017$ oznacza nieujemną liczbę całkowitą. Każda z nich jest dzielnikiem liczby n oraz spełnia żądane oszacowanie:

$$k^j(k+1)^{4034-j} = \sqrt{n}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017-j} \leqslant \sqrt{n}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017} < 1{,}01\sqrt{n}\,.$$

Dowód został zakończony. $\square$

6. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Tańczyło 20 dam: $D_1, D_2, \ldots, D_{20}$. Można z nich utworzyć $\binom{20}{2} = 190$ par (nieuporządkowanych). Każdy z kawalerów $K_1, K_2, \ldots, K_{20}$ tańczył z pewną liczbą dam. Przyjmijmy, że z kawalerem K_i zatańczyło k_i dam. Z nich można utworzyć $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ par (jest tak również dla $k_i = 0$ oraz $k_i = 1$). Wszystkich par dam można więc utworzyć

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \frac{k_3(k_3-1)}{2} + \ldots + \frac{k_{20}(k_{20}-1)}{2}.$$

Tańców było 99, zatem $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{20} = 99$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\big(k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \ldots + k_{20}(k_{20}-1)\big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + \\
&\qquad + 8(k_1 + k_2 + \ldots + k_{20}) - 20\cdot 20\big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + \\
&\qquad + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 8\cdot 99 - 20\cdot 20\big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\big((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \ldots + \\
&\qquad + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 392\big) \geqslant 196,
\end{aligned}$$

bo wyrażenie $(x-4)(x-5)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (4,5)$, zatem dla każdej liczby całkowitej k mamy $(k-4)(k-5) \geqslant 0$. Stąd i z nierówności $196 > 190$ wynika, że pewnym dwóm kawalerom odpowiada ta sama para dam, a to właśnie jest teza twierdzenia, które należało uzasadnić. □

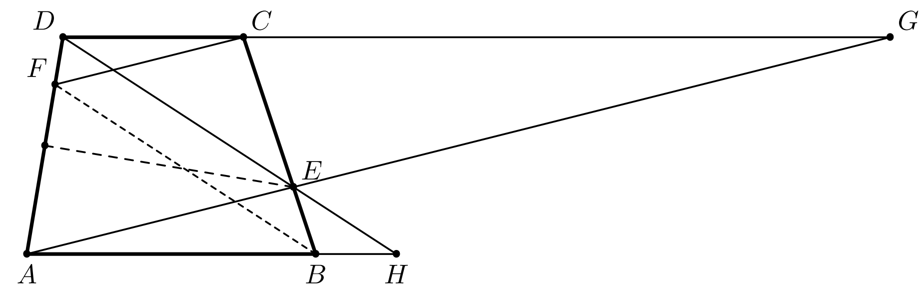
Uwaga – zagadka. Gdybyśmy założyli, że odbyto 98 tańców, teza też byłaby prawdziwa, nierówność $196 > 190$ zastąpilibyśmy taką $192 > 190$. A jak byłoby, gdyby tańców było jedynie 97?

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E. Prosta równoległa do prostej AE, przechodząca przez punkt C, przecina odcinek AD w punkcie F. Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie



Niech G oznacza punkt wspólny prostych AE i DC, a H — punkt wspólny prostych DE i AB. Trójkąty ABE i GCE są podobne, bo proste AB i GC są równoległe, zatem $\frac{GC}{EC} = \frac{AB}{EB}$. Podobnie z podobieństwa trójkątów BHE i CDE wynika równość $\frac{EC}{CD} = \frac{EB}{BH}$. Ponadto $\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD}$, bo proste FC i AE są równoległe. Z tych równości wnioskujemy, że

$$\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD} = \frac{GC}{EC}\cdot\frac{EC}{CD} = \frac{AB}{EB}\cdot\frac{EB}{BH} = \frac{AB}{BH}.$$

Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste BF i DE są równoległe, więc $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ADE$. Punkt E leży na symetralnej odcinka AD, zatem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAE$ i wreszcie $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFC$, bo proste AE i FC są równoległe. Z ostatnich trzech równości wynika, że kąty AFB i DFC są równe. Teza została wykazana. □

8. Dane są liczby całkowite a, b, c. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba $n^3 + an^2 + bn + c$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Załóżmy, wbrew tezie zadania, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ wartość wyrażenia $n^3 + an^2 + bn + c$ jest kwadratem liczby całkowitej. Istnieją więc takie liczby całkowite k, ℓ, m, n, że

$$1 + a + b + c = k^2\,,$$

$$8 + 4a + 2b + c = \ell^2\,,$$

$$27 + 9a + 3b + c = m^2\,,$$

$$64 + 16a + 4b + c = n^2\,.$$

Po odjęciu stronami pierwszej równości od trzeciej i drugiej od czwartej otrzymujemy

$$m^2 - k^2 = 26 + 8a + 2b \quad \text{oraz} \quad n^2 - \ell^2 = 56 + 12a + 2b\,.$$

Liczby $m^2 - k^2$ i $n^2 - \ell^2$ są więc parzyste. Z równości

$$m^2 - k^2 = (m-k)(m+k)$$

wynika, że co najmniej jeden z czynników $m-k$, $m+k$ jest parzysty. Ponieważ ich suma $m - k + m + k = 2m$ jest parzysta, więc drugi też jest parzysty, zatem liczba $m^2 - k^2$ jest podzielna przez 4. Podobnie liczba $n^2 - \ell^2$. Wobec tego przez 4 dzieli się liczba

$$n^2-\ell^2-(m^2-k^2) = 56+12a+2b-(26+8a+2b) = 30+4a = 4(a+7)+2\,.$$

Jednak ona z dzielenia przez 4 daje resztę 2. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\Box$