LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
1 września - 5 października 2017 r. (pierwsza seria)

1. Dane są liczby całkowite a i b oraz liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Wykazać, że jeśli liczby $a+b$ oraz a^2+b^2 są podzielne przez p, to liczba a^2+b^2 jest podzielna przez p^2.

Rozwiązanie:

Skoro $p \mid (a+b)$ i $p \mid (a^2+b^2)$, to $p \mid (a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Jednakże $p \geqslant 3$, więc $p \mid a$ lub $p \mid b$, a ponieważ $p \mid (a+b)$, to $p \mid a$ i $p \mid b$. Wobec tego $p^2 \mid a^2$ oraz $p^2 \mid b^2$, skąd teza zadania. □

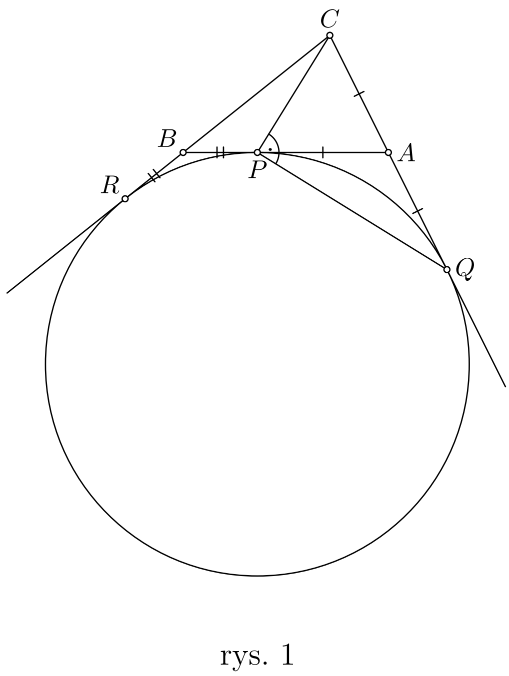
2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $3AC = AB + BC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku AB w punkcie P, zaś do prostej AC w punkcie Q. Wykazać, że kąt CPQ jest prosty.

Rozwiązanie:

Na podstawie równości odcinków stycznych, mamy zależności $BP = BR$, $AP = AQ$ oraz $CR = CQ$. Łącząc je wraz z warunkami zadania dostajemy, że

$$\begin{aligned} 3AC &= AB+BC = AP+PB+BC = AP+RB+BC = \\ &= CR+AP = CQ+AP = AC+AQ+AP = AC+2AP, \end{aligned}$$

stąd $AC = AP = AQ$. Oznacza to, że punkt A jest środkiem odcinka CQ i jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ, więc $\sphericalangle CPQ = 90°$. □



rys. 1

3. Znaleźć wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniające równania

$$\begin{cases} x^2y+2 = x+2yz \\ y^2z+2 = y+2zx \\ z^2x+2 = z+2xy \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedynymi trójkami x, y, z spełniającymi dane równania są: $(-1,-1,-1), (1,1,1), (2,2,2)$.

Sposób I: Dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x(xy-1) = 2(yz-1) \\ y(yz-1) = 2(zx-1) \\ z(zx-1) = 2(xy-1) \end{cases}$$

Wymnażając stronami wszystkie trzy równania otrzymujemy

$$xyz(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 8(xy-1)(yz-1)(zx-1),$$

czyli

$$(xyz-8)(xy-1)(yz-1)(zx-1) = 0.$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

Przypadek **1.** Co najmniej jedna z liczb xy, yz, zx jest równa 1.

Dany układ równań jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $xy = 1$. Z pierwszego równania mamy $yz = 1$, a z drugiego, że $zx = 1$. Zatem $x^2 = \dfrac{xy \cdot zx}{yz} = 1$, więc $x = 1$ lub $x = -1$. Dla $x = 1$ z równości $xy = zx = 1$ dostajemy $y = z = 1$, a dla $x = -1$ analogicznie wnioskujemy, że $y = z = -1$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójki $(1,1,1), (-1,-1,-1)$ spełniają wyjściowy układ.

Przypadek **2.** Żadna z liczb xy, yz, zx nie jest równa 1.

Wtedy na mocy otrzymanej wcześniej równości zachodzi $xyz = 8$. Stąd $xy = \dfrac{8}{z}$, $yz = \dfrac{8}{x}$ oraz $zx = \dfrac{8}{y}$. Podstawiając te równości do danego w treści układu dostajemy

$$\begin{cases} \frac{8x}{z} + 2 = x + \frac{16}{x} \\ \frac{8y}{x} + 2 = y + \frac{16}{y} \\ \frac{8z}{y} + 2 = z + \frac{16}{z} \end{cases}$$

Układ ten jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x \geqslant y$ i $x \geqslant z$. Wtedy x jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym wypadku byłoby $y \leqslant x \leqslant 0$ i $z \leqslant x \leqslant 0$, skąd $xyz \leqslant 0$, co przeczyłoby równości $xyz = 8$. Wobec tego $yz = \frac{8}{x} > 0$, czyli y i z są tego samego znaku i $\dfrac{z}{y} > 0$. Zatem z trzeciego równania dostajemy że

$$z + \frac{16}{z} = \frac{8z}{y} + 2 > 2 > 0,$$

więc $z > 0$ (gdyż dla $z < 0$ byłoby $z + \dfrac{16}{z} < 0$), a skoro y i z są tego samego znaku, to również $y > 0$.

Zatem $x, y, z > 0$, czyli $x^3 \geqslant xyz \geqslant 8$, co daje $x \geqslant 2$. Stąd i z drugiego równania dostajemy nierówność

$$y + \frac{16}{y} = \frac{8y}{x} + 2 \leqslant 4y + 2,$$

która jest równoważna nierówności

$$(y-2)\left(3 + \frac{8}{y}\right) \geqslant 0$$

prawdziwej dla $y \in \left[-\dfrac{8}{3}, 0\right) \cup [2, +\infty)$. Wiemy jednak, że $y > 0$, więc musi zachodzić $y \geqslant 2$. Analogicznie na podstawie trzeciego równania dostajemy $z \geqslant 2$.

Ostatecznie $x, y, z \geqslant 2$, skąd $8 = xyz \geqslant 8$, wobec czego $x = y = z = 2$, co oczywiście spełnia układ dany w zadaniu. $\square$

Sposób II: Mnożąc pierwsze równanie przez y i dodając stronami podwojone drugie równanie otrzymujemy:

$$x^2y^2 + 2y + 2y^2z + 4 = xy + 2y^2z + 2y + 4zx,$$

lub równoważnie

$$x^2y^2 - xy + 4 = 4zx.$$

Analogicznie uzyskujemy $y^2z^2 - yz + 4 = 4xy$ oraz $z^2x^2 - zx + 4 = 4yz$. Podstawiając $a = xy, b = yz$ oraz $c = zx$ dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 - a + 4 = 4c \\ b^2 - b + 4 = 4a \\ c^2 - c + 4 = 4b \end{cases}$$

Udowodnimy, że powyższy układ ma jedynie dwa rozwiązania $(a, b, c) = (4, 4, 4)$ oraz $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. W tym celu rozważmy największą z liczb a, b, c. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to a. Odejmując stronami dwa pierwsze równania dostajemy równość

$$(a - b)(a + b - 1) = 4(c - a)$$

Ponieważ

$$16(a + b - 1) = 4(b^2 - b + 4) + 4(c^2 - c + 4) - 16 = (2b - 1)^2 + (2c - 1)^2 + 14 > 0,$$

to liczba $a + b - 1$ jest dodatnia. Oznacza to, że zachodzi ciąg nierówności

$$0 \leqslant (a - b)(a + b - 1) = 4(c - a) \leqslant 0.$$

Ponieważ w powyższych nierównościach musi zachodzić równość, to mamy $a = b$ i $a = c$. Bezpośrednie wstawienie prowadzi do równania $a^2 - 5a + 4 = 0$, więc istotnie jedynymi rozwiązaniami są trójki $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ oraz $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Wróćmy do rozwiązania zadanego układu. Ponieważ $xy = yz = zx \neq 0$, to $x = y = z$. Wyjściowy układ wraz z tą równością jest równoważny równaniu $x^3 + 2 = x + 2x^2$. Mamy

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1),$$

więc rozwiązaniami zadanego układu są trójki $(x, y, z) = (2, 2, 2), (1, 1, 1), (-1, -1, -1)$. $\square$

4. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. *Blokiem* będziemy nazywać podciąg postaci $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ oraz $a_i = a_{i+1} = \ldots = a_j$. Blok nazywamy *maksymalnym*, jeśli nie jest zawarty w żadnym dłuższym bloku. Przykładowo w ciągu $(1, 0, 0, 0, 2, 1, 1)$ maksymalnymi blokami są (1), $(0, 0, 0)$, (2), $(1, 1)$.

Niech K_n będzie liczbą takich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Ponadto niech L_n będzie liczbą wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Udowodnić, że $L_n = K_n + \frac{1}{3}K_{n-1}$ dla wszystkich $n > 1$. $\square$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że ciąg (K_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$K_1 = 3, K_2 = 6 \quad \text{oraz} \quad K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

Rozważmy $n \geqslant 3$. Ciągi długości n, które mają wszystkie maksymalne bloki nieparzystej długości dzielimy na dwa podzbiory: takie, które mają ostatni maksymalny blok długości 1 oraz takie, które mają ostatni maksymalny blok długości co najmniej 3.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość 1, to po jego usunięciu dostajemy ciąg długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy na dwa sposoby dopisać na końcu wyraz, który utworzy nowy maksymalny blok długości 1. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiorze jest $2K_{n-1}$.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość co najmniej 3, to po usunięciu jego dwóch ostatnich wyrazów otrzymamy ciąg długości $n - 2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości.

Odwrotnie, do ciągu długości $n-2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy tylko na jeden sposób dopisać dwa wyrazy tak, aby ostatni maksymalny blok uzyskanego ciągu miał długość co najmniej 3. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiorze jest K_{n-2}.

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$. Sprawdzamy, że $K_1 = 3$ oraz $K_2 = 6$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Udowodnimy teraz, że ciąg (L_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$L_1 = 3, L_2 = 7 \quad \text{oraz} \quad L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

Rozważmy $n \geqslant 3$. Ciągi długości n, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach dzielimy na dwa podzbiory: takie, które kończą się dwoma jedynkami oraz takie, w których przynajmniej jeden z dwóch ostatnich wyrazów nie jest jedynką.

Jeżeli dwa ostatnie wyrazy w ciągu są równe 1, to po ich obcięciu dostaniemy ciąg długości $n-2$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n-2$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy dopisać dwie jedynki, w tak otrzymanym ciągu długości n liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach, ponadto jest on zakończony dwoma jedynkami. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiorze jest L_{n-2}.

Jeżeli przynajmniej jeden z ostatnich dwóch wyrazów ciągu nie jest jedynką, to po obcięciu ostatniego wyrazu dostaniemy ciąg długości $n-1$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n-1$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy na dwa sposoby dopisać ostatni wyraz tak, aby 0 i 2 nie występowały na sąsiednich pozycjach a na ostatnich dwóch pozycjach nie było dwóch jedynek. Dokładniej: po 0 możemy dopisać 0 lub 1, po 1 możemy dopisać 0 lub 2 zaś po 2 możemy dopisać 1 lub 2. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiorze jest $2L_{n-1}$.

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n \geqslant 3$. Sprawdzamy, że $L_1 = 3$ oraz $L_2 = 7$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Mając wzory rekurencyjne na ciągi (K_n) oraz (L_n), możemy udowodnić daną w zadaniu zależność przez indukcję. Dla $n = 2$ i $n = 3$ żądana równość jest spełniona gdyż

$$L_2 = 7 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 = K_2 + \frac{1}{3}K_1 \quad \text{oraz} \quad L_3 = 17 = 15 + \frac{1}{3} \cdot 6 = K_3 + \frac{1}{3}K_2.$$

Natomiast dla $n \geqslant 4$ wynika ona z założenia indukcyjnego zastosowanego do $n-1$ i $n-2$:

$$\begin{aligned} L_n - K_n - \frac{1}{3}K_{n-1} &= (2L_{n-1} + L_{n-2}) - (2K_{n-1} + K_{n-2}) - \frac{1}{3}(2K_{n-2} + K_{n-3}) \\ &= 2(L_{n-1} - K_{n-1} - \frac{1}{3}K_{n-2}) + (L_{n-2} - K_{n-2} - \frac{1}{3}K_{n-3}) \\ &= 2 \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że żądana zależność jest spełniona. □

Uwaga: Z uzyskanych wzorów rekurencyjnych można wyprowadzić wzory ogólne

$$K_n = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right) \qquad \text{oraz} \qquad L_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right).$$

Metoda uzyskiwania wzorów ogólnych dla rekurencji liniowych jest opisana w Dodatku A do Broszury L Olimpiady Matematycznej.

(db,mg)