

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$$

Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t .

2. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Wykazać, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.
3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geq 1$, $c \geq 0$ oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $(ab + c)^n - c \leq ((b + c)^n - c)a^n$.
4. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geq 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geq 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

II seria.

5. Dwuścienne kątów wewnętrznych A, B, C trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F , a okrąg opisany na trójkącie ABC — odpowiednio w punktach K, L, M . Dowieść, że

$$\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geq 9.$$

6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

7. Obliczyć kres górny objętości czworościanów zawartych w kuli o danym promieniu R , których jedną z krawędzi jest średnica tej kuli.
8. Niech a_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 6n\}$, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5 oraz niech b_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7n\}$, których iloczyn elementów daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5. Obliczyć iloraz a_n/b_n .

III seria.

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: (1; \infty) \rightarrow (1; \infty)$ spełniające następujące warunki:

(i) $f(x+1) = \frac{(f(x))^2 - 1}{x}$ dla $x \geq 1$;

(ii) funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest ograniczona.

10. Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$ oraz $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB . Dowieść, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF .
11. Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.
12. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.