



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5. \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Wyznaczyć liczbę ciągów nieskończonych a_1, a_2, a_3, \dots , o wyrazach równych $+1$ i -1 , spełniających równanie

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz warunek: w każdej trójce kolejnych wyrazów (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) występuje zarówno $+1$, jak i -1 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjeździe dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2004 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , mające dokładnie \sqrt{n} dzielników dodatnich.

5. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}.$$

6. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.