

# LVIII Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wielomian  $P(x)$  ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany  $P(x)$  oraz  $P(P(P(x)))$  mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

2. Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym

$$BC = CD, \quad DE = EA, \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ.$$

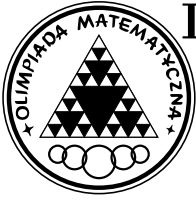
Udowodnić, że z odcinków o długościach  $AC$ ,  $CE$ ,  $EB$  można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę  $\alpha$  kąta  $ACE$  i miarę  $\beta$  kąta  $BEC$ .

3. Z  $n^2$  płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku  $n$ . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę  $P$  mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki  $P$ . Następnie odwracamy płytkę  $P$  na drugą stronę.

Dla każdego  $n \geq 2$  rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

### Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



# LVIII Olimpiada Matematyczna

## Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że jeżeli  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz  $ad = b^2 + bc + c^2$ , to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

5. Czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB \neq CD$ , jest wpisany w okrąg. Czworokąty  $AKDL$  i  $CMBN$  są rombami o bokach długości  $a$ . Dowieść, że punkty  $K, L, M, N$  leżą na jednym okręgu.

6. Liczby dodatnie  $a, b, c, d$  spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a + b + c + d) - 4.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.