

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest najmniejszy. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że środki odcinków AB, AC, BE, CD leżą na jednym okręgu.

2. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej k liczba $P(k)$ nie jest całkowita, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych m , dla których liczba $P(m)$ nie jest całkowita.

3. Znaleźć największą liczbę naturalną m o następującej własności: wśród pięciu dowolnie wybranych podzbiorów 500-elementowych zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej m elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2015 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

5. Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostopadłe na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.

6. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje taka liczba całkowita $b > a$, że liczba $1 + 2^b + 3^b$ dzieli się przez liczbę $1 + 2^a + 3^a$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.